УДК 519.584

Г. Л. ГРИНБЕРГ, канд. техн. наук, доцент НТУ «ХПИ»,
М. Л. ЛЮБЧИК, студентка НТУ «ХПИ»

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ ПРЕДПОЧТЕНИЯ В ЗАДАЧАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ЭКСПЕРТНОГО ОЦЕНИВАНИЯ

Розглядається задача ідентифікації нелінійної функції переваг експертів на основі вимірюваних часткових показників. Для відновлення функції переваг використано метод опорних векторів і ядерних апроксимацій. Отримано вирішення задачі узгодження функції переваг з експертними оцінками вагових коефіцієнтів часткових показників.

Рассматривается задача идентификации нелинейной функции предпочтения экспертов на основе измеряемых частных показателей. Для восстановления функции предпочтения используется метод опорных векторов и ядерных аппроксимаций. Получено решение задачи согласования функции предпочтения с экспертными оценками весовых коэффициентов частных показателей.

The problem of nonlinear evaluation function identification using the measured partial indexes is considered. For the evaluation function recovery support vector method as well as kernel approximation are used. The solution of evaluation function coordination with the expert estimations of partial indexes weight coefficients is obtained.

Введение. Одним из хорошо известных и широко используемых на практике подходов к сравнительной оценке и упорядочиванию объектов (альтернатив) в задачах многокритериального принятия решений является построение так называемой оценочной функции, аппроксимирующей функцию предпочтения экспертов и позволяющей свести множество частных показателей (критериев) к одному обобщенному [1,2]. На практике достаточно часто используются модели оценочных функций в виде линейной свертки частных показателей, в которой веса задаются экспертами. Альтернативой является непосредственная экспертная оценка некоторого комплексного обобщенного показателя (так называемого интегрального индикатора) на основе наблюдаемых (измеряемых) значений частных показателей. Возможное противоречие между экспертными оценками весов частных критериев в их линейной свертке и экспертными оценками интегральных показателей разрешается с помощью процедур оптимального согласования [2,3], позволяющих осуществить одновременную коррекцию экспертных оценок весов частных показателей и оценок обобщенного показателя с целью выработки согласованного решения.

Использование простейшей линейной свертки не всегда адекватно отражает фактические предпочтения экспертов, которые в реальных ситуациях могут иметь достаточно сложный характер, выражаемый априори неизвестной нелинейной зависимостью обобщенного показателя от значений частных показателей Для решения подобных задач предлагались методы, основанные на многомерной полиномиальной аппроксимации оценочной функции [4], однако при этом остается открытым вопрос о выборе системы аппроксимирующих полиномов, обеспечивающей достаточно высокую точность аппроксимации в условиях ограниченной исходной информации.

В настоящей работе рассматривается решение задачи идентификации нелинейной функции предпочтения экспертов на основе измеряемых значений частных показателей с целью нахождения зависимости сформированного экспертами обобщенного показателя от частных критериев. Для восстановления искомых зависимостей предлагается использовать метод опорных векторов и ядерных аппроксимаций [5], что позволяет существенно уменьшить число оцениваемых параметров модели и, в условиях ограниченности исходных данных (малая выборка), обеспечить возможность восстановления сложных нелинейных функций предпочтения экспертов. При этом экспертная оценка весов линейной свертки частных показателей, рассматриваемой как первое приближение к модели нелинейной оценочной функции, используется в качестве априорной информации, позволяющей оптимальным образом согласовать полученную нелинейную модель с экспертной оценкой сравнительной важности частных показателей.

Постановка задачи согласованной идентификации функции предпочтения. Рассматривается множество однотипных объектов (альтернатив) $\Im = \{\upsilon_1,\ldots,\upsilon_n\}$ и множество частных показателей $\Re = \{\rho_1,\ldots,\rho_m\}$. Каждый объект υ_i характеризуется вектором объективно наблюдаемых (измеряемых) значений показателей $x_i^{\mathrm{T}} = (x_i^1,\ldots,x_i^m)$, где x_i^j - измеренное значение j-того показателя для i-того объекта. Набор наблюдений представляется в виде матрицы исходных данных $X_n = \{x_i^j\}_{i,j=1}^{n,m}$.

Обобщенным показателем объекта υ_i называется скалярная величина $J(x_i)$, поставленная в соответствие вектору измеренных значений его частных показателей x_i. Предполагается, что группа экспертов на основе имеющихся исходных данных измерений и собственных предпочтений формирует вектор оценок обобщенного показателя для каждого объекта $q_n^{\mathrm{T}} = (q_1,\ldots,q_n)$ и вектор весов частных показателей $w^{\mathrm{T}} = (w_1,\ldots,w_m)$, имеющих смысл априорных экспертных оценок их относительной важности. Необходимо на основе имеющихся данных измерений частных показателей X_n восстановить оценочную функцию $J(x)$, задающую модель функции предпочтения, оптимально согласованную с имеющимися экспертными оценками $\{q_n, w\}$ и реализующую нелинейную свертку частных показателей.

С целью формализации понятия оптимального согласования рассмотрим вначале задачу согласования экспертных оценок в случае линейной свертки частных показателей.

Оптимальное согласование экспертных оценок в задаче линейной свертки. С использованием имеющихся данных измерений частных показателей в предположении о линейном характере функции предпочтений нетрудно осуществить взаимный пересчет экспертных оценок обобщенных показателей рассматриваемых объектов и весов частных показателей:

$$(q_n, w) \xrightarrow{X_n} (q = X_n w,\ w_n = X_n^+ q_n). \tag{1}$$

Очевидно, что в общем случае $q_n \neq q,\ w \neq w_n$. Экспертные оценки называются *согласованными*, если для них выполняется условие $\overline{q} = X_n \overline{w}$. Согласно доказанной в [3] теореме согласования существуют такие числа $\alpha, \beta \in [0,1]$, для которых векторы $w_\alpha = \alpha w + (1-\alpha) w_n,\ q_\beta = \beta q + (1-\beta) q$ удовлетворяют условию $q_\beta = X_n w_\alpha$. Очевидно, что существует множество векторов, удовлетворяющих указанному условию.

Экспертные оценки будем называть *оптимально согласованными*, если они минимизируют функционал вида:

$$\mathrm{M}(q, w) = \tfrac{1}{2}\left\|q_n - q\right\|^2 + \tfrac{1}{2}\gamma\left\|(w - w_0)\right\|^2 \tag{2}$$

при наличии ограничений $q = X_n w,\ e^{\mathrm{T}} w = 1,$ учитывающих очевидную связь экспертных оценок для линейной функции предпочтения и требование нормировки весовых коэффициентов. Здесь w_0 - вектор априорных значений весовых коэффициентов линейной свертки частных показателей, γ - весовой коэффициент, учитывающий относительную степень доверия к экспертным оценкам обобщенного показатель и априорных весовых коэффициентов.

Решение задачи (2) может быть получено с помощью функции Лагранжа

$$L(q, w, \lambda, \mu) = \mathrm{M}(q, w) + \lambda^{\mathrm{T}}(q_n - X_n w) + \mu(1 - e^{\mathrm{T}} w), \tag{3}$$

где λ, μ - множители Лагранжа.

Воспользовавшись условиями оптимальности в форме Куна - Таккера, нетрудно получить непосредственную связь между оптимальными значениями множителей Лагранжа $\mu = m^{-1} e^{\mathrm{T}} X_n^{\mathrm{T}} \lambda,\ \lambda = P^{-1}(q_n - X_n w_0),$ где $P_n = \gamma I_n + X_n \Pi X_n^{\mathrm{T}},\ \Pi_m = I_m - m^{-1} e e^{\mathrm{T}}.$

С учетом полученных соотношений, решение задачи оптимального согласования экспертных оценок может быть получено в следующем виде:

$$\overline{w} = w_0 + \Pi_m X_n^{\mathrm{T}} P_n^{-1}(q_n - X_n w_0),\ \ \overline{q} = X_n w_0 + \Psi_n P_n^{-1}(q_n - X_n w_0), \tag{4}$$

где $\Psi_n = X_n \Pi_m X_n^{\mathrm{T}},\ P = \gamma I_n + \Psi_n.$

Очевидно, что имеют место следующие предельные соотношения: $\gamma \to 0 : \overline{w} = X_n^+ q_n$, $\gamma \to \infty : \overline{w} = w_0$, отражающие крайние случаи формирования вектора весов линейной свертки частных показателей: при полном отсутствии априорной информации ($\gamma = 0$) и при полном доверии к априорным оценкам весовых коэффициентов ($\gamma = \infty$).

Идентификация нелинейной функции предпочтения. Примем модель нелинейной функции предпочтения в виде $J(x) = \varphi^{\mathrm{T}}(x)c$, где $c^{\mathrm{T}} = (c_1, \dots, c_M)$ - вектор подлежащих определению неизвестных параметров модели, $\varphi^{\mathrm{T}}(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_M(x))$ - вектор координатных функций, однозначно связанных с некоторой симметрической положительно определенной ядерной функцией $K(x, x_i) = \varphi^{\mathrm{T}}(x)\varphi(x_i)$, в качестве которой выберем радиально-базисную функцию $K(x, x_i) = \exp(-\mu \|x - x_i\|^2)$, где $\mu > 0$ - параметр функции.

В соответствии с принятой моделью формирования экспертных оценок значений обобщенного показателя $q_n^{\mathrm{T}} = (q_1, \dots, q_n)$, $q_i = J(x_i) + \xi_i$, $i = \overline{1, n}$, где ξ_i - погрешности экспертного оценивания, уравнение связи экспертных оценок с измеренными частными показателями имеет вид:

$$q_n = \Phi_n c + \xi, \ \Phi_n^{\mathrm{T}} = (\varphi(x_1), .., \varphi(x_n)), \ \xi = (\xi_n, .., \xi_n). \tag{5}$$

В соответствии с методом опорных векторов [5] найдем оценки неизвестных параметров модели путем решения задачи условной минимизации регуляризованного функционала

$$I(c) = \tfrac{1}{2}\|\xi\|^2 + \tfrac{1}{2}\gamma\|(c - c_0)\|^2, \quad \xi = q_n - \Phi_n c, \tag{6}$$

где c_0 - вектор априорных значений параметров модели, $\gamma > 0$ - параметр регуляризации, обеспечивающий устойчивость процедуры оценивания.

Эквивалентная сопряженная оптимизационная задача может быть сформулирована с использованием функции Лагранжа вида $L(c, \xi, \lambda) = I(c) + \lambda^{\mathrm{T}}(q - \Phi_n c - \xi)$, где $\lambda^{\mathrm{T}} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ - вектор сопряженных переменных (множителей Лагранжа).

Записывая условия оптимальности для сопряженной задачи, получим выражения для оптимальных оценок неизвестных параметров модели и сопряженных переменных:

$$\begin{aligned} &c^* = c_0 + \gamma^{-1}\Phi_n^{\mathrm{T}}\lambda^*, \ \lambda^* = \gamma \mathrm{A}_\gamma^{-1}(q_n - \Phi_n c_0), \\ &\mathrm{A}_\gamma = \gamma I_n + \mathrm{K}_n, \ \mathrm{K}_n = \Phi_n \Phi_n^{\mathrm{T}} = \{K(x_i, x_j)\}_{i,j=1}^{n,n}. \end{aligned} \tag{7}$$

где I_n - единичная матрица. Заметим, что оценки параметров модели существенным образом зависят от вектора c_0 априорных значений параметров модели функции предпочтения.

Оптимальное согласование модели нелинейной функции предпочтения. Полученные оценки параметров модели функции предпочтения зависят от вектора априорных значений оцениваемых параметров c_0, для выбора которого естественно воспользоваться имеющейся информацией об экспертных оценках вектора весов *w*, определяющих относительную важность частных критериев. Трактуя линейную свертку критериев как первое приближение к построению нелинейной модели функции предпочтения, выберем оптимальные априорные значения параметров модели из условия наилучшего приближения вектора априорных оценок обобщенного показателя $q_0 = \Phi_n c_0$ к вектору прогнозируемых значений их экспертных оценок, полученных на основе линейной свертки измерений частных критериев. Очевидно, что указанный вектор прогнозных значений задается соотношением $\tilde{q}_n = X_n w$.

Для нахождения вектора априорных значений искомых параметров модели функции предпочтения, оптимальным образом согласованного с экспертными оценками весов частных критериев *w*, рассмотрим задачу условной оптимизации вспомогательного регуляризованного функционала:

$$I_0(c_0) = \tfrac{1}{2}\|\zeta\|^2 + \tfrac{1}{2}\omega\|c_0\|^2, \;\; \zeta = \tilde{q}_n - q_0 = X_n w - \Phi_n c_0. \tag{8}$$

Используя функцию Лагранжа $L(c_0, \zeta, \nu) = I_0(c_0) + \nu^{\mathrm{T}}(X_n w - \Phi_n c_0 - \zeta)$, где $\nu^{\mathrm{T}} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ - вектор сопряженных переменных, $\omega > 0$ - параметр регуляризации, получим решение задачи условной оптимизации (8):

$$c_0^* = \omega^{-1}\Phi_n^{\mathrm{T}}\nu^*, \;\; \nu^* = \omega \mathrm{A}_\omega^{-1} X_n w, \;\; \mathrm{A}_\omega = \omega I_n + \mathrm{K}_n. \tag{9}$$

Окончательно, с учетом (7), (9) выражение для функции предпочтения, оптимально согласованной с имеющимися экспертными оценками, приобретает следующий вид:

$$\hat{J}_n(x) = \varphi^{\mathrm{T}}(x)\Phi_n d, \;\; d = [\mathrm{A}_\gamma^{-1} q_n + (I_n - \mathrm{A}_\gamma^{-1}\mathrm{K}_n)\mathrm{A}_\omega^{-1} X_n w]. \tag{10}$$

С учетом очевидного соотношения $\varphi^{\mathrm{T}}(x)\Phi_n = (K(x, x_1), \ldots, K(x, x_n))$, окончательно полученная оценка функции предпочтения может быть представлена в виде линейной комбинации ядерных функций, вычисленных в точках пространства векторов частных показателей, соответствующих их измеренным значениям:

$$\hat{J}_n(x) = \sum_{i=1}^{n} d_i K(x, x_i), \; d = (d_1, \ldots, d_n), \tag{11}$$

где коэффициенты d_i линейной комбинации зависят от матрицы исходных данных X_n и экспертных оценок $\{q_n, w\}$. Таким образом, формула (11) задает, фактически, искомую нелинейную свертку частных показателей, определяемую их измеренными значениями и оптимальным образом согласованную с экспертными оценками обобщенного показателя.

Следует отметить, что полученные оценки зависят только от симметрической квадратной $(n \times n)$ матрицы K_n, состоящей из ядерных функций, определенных в точках наблюдений, вследствие чего вычисление оценок связано с обращением хорошо обусловленных матриц. В окончательную формулу не входят в явном виде координатные функции $\{\varphi_i(x)\}$, что устраняет необходимость в их предварительном выборе. При этом возникает возможность аппроксимации достаточно сложных функций предпочтения, причем количество оцениваемых параметров модели не превышает числа наблюдений. В дальнейшем полученная зависимость может использоваться для оценивания обобщенных показателей новых объектов без участия экспертов.

Заключение. Предложенный подход позволяет рассматривать задачу нелинейной свертки критериев как задачу идентификации неизвестной функции предпочтения экспертов на основе обучающей выборки наблюдений частных показателей. Рассмотренной схеме идентификации можно сопоставить соответствующую нейросетевую структуру с радиально-базисными активационными функциями и весами, соответствующими оцениваемым параметрам модели. При этом при наличии достаточно большой обучающей выборки для настройки весов можно использовать алгоритмы обучения искусственных нейронных сетей. Отдельной задачей является выбор параметров регуляризации и параметров используемых ядерных функций. Для ее решения необходимо ввести в рассмотрение дополнительный критерий верхнего уровня, использующий, например, процедуру скользящего контроля [6].

Список литературы. ***1***. *Айвазян С.А., Мхитарян В.С.* Прикладная статистика и основы эконометрики. - М.: ЮНИТИ, 1998. - 393 с. ***2.*** *Литвак Б.Г.* Экспертная информация: Методы получения и анализа. – М.: Радио и связь, 1982. - 265 с. ***3.*** *Стрижов В.В.* Согласование экспертных оценок для биосистем в экстремальных условиях // Сообщения по прикладной математике. - М.: ВЦ РАН, 2002. - 41 с. ***4.*** *Васильев С.Н., Селедкин А.П.* Синтез функции эффективности в многокритериальных задачах принятия решений // Известия АН СССР, Техническая кибернетика. - 1980. - № 3.- С. 186 - 190. ***5.*** *Vapnik V.N.* The Nature of Statistical Learning Theory. Springer-Verlag, New York, 1995. ***6.*** *Вапник В.Н.* Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. – М.: Наука, 1979. - 265 с.

Поступила в редколлегию 24.03.09